10

निश्चित समाकल
(Definite Integral)

10.01 निश्चित समाकल (Definite Integral)

पूर्व अध्यायों में हमने अनिश्चित समाकलों के विभिन्न विधियों से मान ज्ञात किए तथा इसे अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया के रूप में पढ़ा। वास्तव में समाकल गणित की खोज समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने तथा अनन्त श्रेणी का योग ज्ञात करने के लिए हुई। निश्चित समाकल का मान अद्वितीय होता है। अन्तराल $[a, b]$ में फलन $f(x)$ के निश्चित समाकलन को $\int_a^b f(x)dx$ द्वारा प्रकट किया जाता है, जहाँ a व b निश्चित समाकल की क्रमशः निम्न व उच्च सीमाएँ हैं।

निश्चित समाकन का मान या तो श्रेणी के योगफल की सीमा के रूप में ज्ञात किया जाता है अथवा अन्तराल $[a, b]$ में इसका समाकल (प्रतिअवकलज) F होने पर अंतिम बिन्दुओं पर F के मानों के अन्तर $F(b)-F(a)$ के बराबर होता है। इस अध्याय मे हम निम्न बिन्दुओं पर विचार करेंगे–

(i) योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन,

(ii) कलन का आधारभूत प्रमेय,

(iii) साधारण निश्चित समाकलों के मान ज्ञात करना,

(iv) निश्चित समाकलों के मूल गुणधर्म।

10.02 योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल (Definite integral as a limit of sum)

अगर किसी श्रेणी में पदों की संख्या अनन्त की ओर व प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर हो, तो निश्चित समाकल एक श्रेणी के योगफल की सीमा के रूप में परिभाषित किया जाता है।

परिभाषाः यदि अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित कोई वास्तविक मानों का संतत फलन $f(x)$ और अन्तराल $[a, b]$ को n बराबर भागों में बिन्दुओं $a+h, a+2h, a+3h, \ldots, a+(n-1)h$ द्वारा (जहाँ h प्रत्येक भाग की लम्बाई है) विभाजित किया जाता तो

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\left[h\{f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\}\right] \quad (\text{जहाँ } n\to\infty \text{ तथा } nh=b-a)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[h\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\}\right]$$

इस परिभाषा के प्रयोग से निश्चित समाकल के मान ज्ञात करने की विधि को प्रथम सिद्धान्त (ab-initio method) से समाकलन ज्ञात करना कहते है। यह व्यंजक योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल की परिभाषा कहलाता है।

उपपत्तिः माना $f(x)$ चित्रानुसार अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक व संतत फलन है।

अन्तराल $[a, b]$ को h चौड़ाई के n अन्तरालो में विभाजित करने पर $AA_n = OA_n - OA$

या $$AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = b-a$$

या $$\underbrace{h+h+h+\ldots+h}_{n\,\text{बार}} = b-a$$

या $$nh = b-a \qquad \Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

माना $y=f(x)$ जब $x=a, y=f(a)$

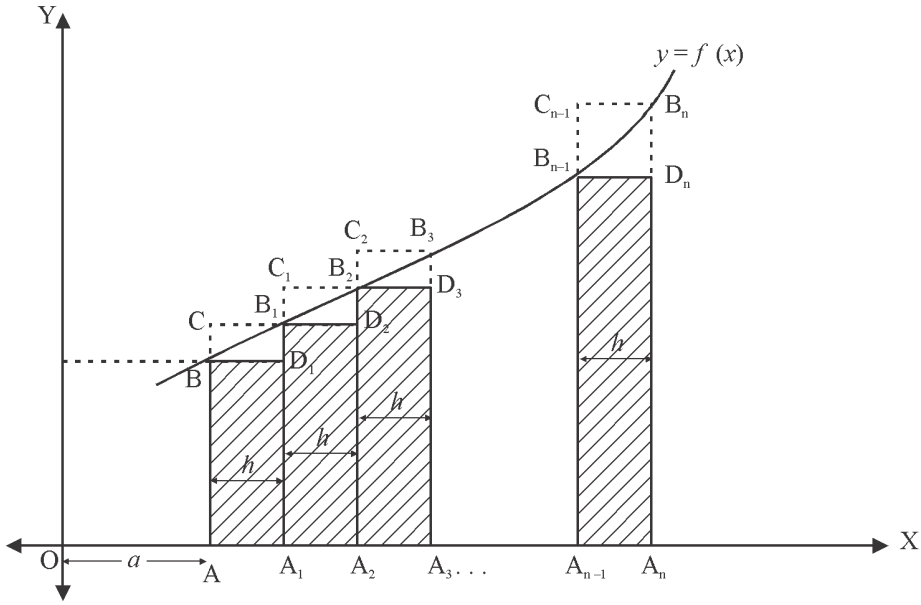
अतः B के निर्देशांक $(a, f(a))$ होंगे

अर्थात् $$AB = f(a)$$

इसी प्रकार

$$A_1B_1 = f(a+h),\ A_2B_2 = f(a+2h), \ldots,\ A_nB_n = f(a+nh)$$

चित्रानुसार, छायांकित आयताकार पट्टिकाओं, जो कि वक्र के नीचे है, के क्षेत्रफलों का योगफल Δ_1 हो तो–



$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \text{आयत } AA_1D_1B + \text{आयत } A_1A_2D_2B_1 + \ldots + \text{ आयत } A_{n-1}A_nD_nB_{n-1}\\ &= AB \times AA_1 + A_1B_1 \times A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}B_{n-1} \times A_{n-1}A_n\\ &= f(a)\times h + f(a+h)\times h + f(a+2h)\times h + \ldots + f(a+\overline{n-1}h)\times h\\ &= h\left[f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}h)\right]\end{aligned}$$

वक्र $y = f(x)$, x- अक्ष तथा दो कोटियों $x = a, x = b$ से परिबद्ध क्षेत्रफल AA_nB_nBA को Δ से प्रकट करें तो Δ_1 का मान Δ से कम होगा। पुनः माना

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \text{आयत } AA_1B_1C + \text{ आयत } A_1A_2B_2C_1 + \ldots + \text{ आयत } A_{n-1}A_nB_nC_{n-1}\\ &= A_1B_1 \times AA_1 + A_2B_2 \times A_1A_2 + \ldots + A_nB_n \times A_{n-1}A_n\\ &= f(a+h)\times h + f(a+2h)\times h + \ldots + f(a+nh)\times h\\ &= h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)\right]\end{aligned}$$

यह क्षेत्रफल Δ से अधिक होगा, इस प्रकार Δ का मान Δ_1 से अधिक व Δ_2 से कम होगा, अर्थात्

$$\Delta_1 < \Delta < \Delta_2$$

पुनः $$\begin{aligned}\Delta_2 - \Delta_1 &= h\,f(a+nh) - h\,f(a)\\ &= h\left[f(b) - f(a)\right] \qquad (\because a + nh = b)\end{aligned}$$

स्पष्टतः जब आयताकार पट्टिकाओं की चौड़ाई h अत्यल्प होगी अर्थात् $h \to 0$ तो Δ_1 और Δ_2 का मान Δ के अत्यधिक निकट होगा।

अर्थात् $$\lim_{h\to 0}\Delta_1 = \lim_{h\to 0}\Delta_2 = \Delta$$

अतः $$\Delta = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

एवं $$\Delta = \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\right]$$

निष्कर्षतः निश्चित समाकल को योगफल की सीमा के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

टिप्पणीः उपर्युक्त सूत्रों को निम्न प्रकार से भी व्यक्त कर सकते है:

(i) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+\overline{n-1}h)\right],$$

जहाँ $h = \dfrac{b-a}{n}$ (स्पष्टतः $n\to\infty$ तो $h\to 0$)

(ii) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+nh)\right],$$ जहाँ $h = \dfrac{b-a}{n}$

प्रथम सिद्धान्त से समाकलन का मान ज्ञात करन के लिए उपर्युक्त में से किसी भी सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some important results)

(i) $$\sum r = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $$\sum r^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) $$\sum r^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

(v) $$\sum(2r-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

(vi) $$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+\overline{n-1}\,d) = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

(vii) $$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)},\ r\neq 1$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 (2x+1)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः परिभाषानुसार, $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\ldots+f(a+nh)\right],$$

जहाँ $nh = b-a$

यहाँ $$a=0,\ b=2,\ f(x)=2x+1,\ nh = 2-0 = 2$$

अतः $$\int_0^2 (2x+1)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(0+h)+f(0+2h)+f(0+3h)+\ldots+f(0+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots+f(nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[(2h+1)+(4h+1)+(6h+1)+\ldots+(2nh+1)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[(2h+4h+6h+\ldots+2nh)+(1+1+1+\ldots+n \text{ बार})\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[2h(1+2+3+\ldots+n)+n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[2h\frac{n(n+1)}{2}+n\right] = \lim_{h\to 0}\left[h^2 n(n+1)+nh\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[nh(nh+h)+nh\right] = \lim_{h\to 0}\left[2(2+h)+2\right] \qquad (\because nh=2)$$

$$= \left[2(2+0)+2\right] = 4+2 = 6.$$

उदाहरण-2. योगफल की सीमा के रूप में $\int_{-1}^{1} e^x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=e^x,\ a=-1,\ b=1 \qquad (\therefore nh = 1+1 = 2)$

$$\int_{-1}^{1} e^x dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(-1+h)+f(-1+2h)+f(-1+3h)+\ldots+f(-1+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{-1+h}+e^{-1+2h}+e^{-1+3h}+\ldots+e^{-1+nh}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^{-1}.e^{h}+e^{-1}.e^{2h}+e^{-1}.e^{3h}+\ldots+e^{-1}.e^{nh}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} he^{-1}\left[e^{h}+e^{2h}+e^{3h}+\ldots+e^{nh}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} h.e^{h}.\frac{(e^h)^n-1}{e^n-1}$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} e^{h}.h\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = \frac{1}{e}\lim_{h\to 0} he^{h}\frac{e^2-1}{e^h-1} \qquad [\because nh=2]$$

$$= \frac{e^2-1}{e}\lim_{h\to 0} e^{h}.\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = (e-1/e)e^{\circ}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{((e^h-1)/h)}$$

$$= \left(e-\frac{1}{e}\right)\times 1\times\frac{1}{1} = e-\frac{1}{e}.$$

उदाहरण-3. योगफल की सीमा के रूप में $\int_{0}^{1} x^2\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $f(x)=x^2,\ a=0,\ b=1 \qquad \therefore\ nh = b-a = 1-0 = 1$

$$\therefore \quad \int_{0}^{1} x^2\, dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(0+h)+f(0+2h)+f(0+3h)+\ldots+f(0+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots+f(nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[h^2+4h^2+9h^2+\ldots+n^2h^2]$$

$$= \lim_{h\to 0} h.h^2[1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2]$$

$$= \lim_{h \to 0} h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1(1+h)(2\times 1+h)}{6}$$

$$= \frac{(1+0)(2+0)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

प्रश्नमाला 10.1

योगफल की सीमा के रूप में (प्रथम सिद्धान्त से) निम्न निश्चित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_3^5 (x-2)\,dx$ 2. $\int_a^b x^2\,dx$ 3. $\int_1^3 (x^2+5x)\,dx$

4. $\int_a^b e^{-x}dx$ 5. $\int_0^2 (x+4)\,dx$ 6. $\int_1^3 (2x^2+5)\,dx$

10.03 समाकलन गणित का आधारभूत प्रमेय (Fundamental theorem of integral calculus)

कथन: यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक मानों का सतत फलन हो तथा

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x),$$ अर्थात् $f(x)$ का प्रतिअवकलज $F(x)$ हो

तो $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \lim_{h \to 0} h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

जहाँ $F(b) - F(a)$, निश्चित समाकल का मान कहलाता है और यह अद्वितीय होता है।

10.04 निश्चित समाकल परिभाषा (Definition)

यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित एक वास्तविक मानों का संतत फलन हो तथा $f(x)$ का प्रतिअवकलज $F(x)$ हो तो

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

जहाँ a व b निश्चित समाकल की क्रमशः निम्न व उच्च सीमाएँ हैं तथा अन्तराल $[a, b]$ को समाकलन का परिसर कहते हैं। इस निश्चित समाकल को "$f(x)$ का a से b तक समाकल" पढ़ते हैं। निश्चित समाकल का मान निश्चित होने के कारण समाकलन करने के बाद अचर c इसमें नहीं आयेगा।

10.05 साधारण निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना (To find the value of the common definite integrals)

किसी फलन के निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने के लिए पहले उस फलन का ज्ञात विधियों से अनिश्चित समाकलन निकाला जाता है फिर परिणाम में चर के स्थान पर उच्च सीमा ओर निम्न सीमा रखकर उसका मान निकाल लिया जाता है। इन दोनों मानों के अन्तर को ही निश्चित समाकल का मान कहते हैं। निम्न उदाहरणों से प्रक्रिया स्पष्ट हो जायेगी–

(i) $$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(ii) $$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

(iii) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_0^1 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

अनिश्चित समाकल में प्रयुक्त मानक विधियों का प्रयोग करते हुए हम निश्चित समाकल का मान ज्ञात कर सकते हैं। समाकलन हेतु सामान्यतः

(i) मानक सूत्रों तथा उनमें रूपान्तरण

(ii) प्रतिस्थापन

(iii) आंशिक भिन्न

(iv) खण्डशः समाकलन

विधियों का प्रयोग करते हैं।

11.06 प्रतिस्थापन विधि से निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना

प्रतिस्थापन विधि से निश्चित समाकल का मान ज्ञात करने में निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए।

(i) माने हुए प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्र चर (माना x) को नये चर (माना t) में परिवर्तित किया जाता है।

(ii) दी हुए सीमाओं को नई प्रतिस्थापित चर राशि t के अनुसार बदला जाता है।

(iii) पुराने चर x के अवकलन चिह्न (dx) को नये चर (माना t) के अवकलन चिह्न (dt) में भी उसी प्रतिस्थापन से बदला जाता है।

इस विधि से समाकल मानक रूप में परिवर्तित हो जाता है और उसका मान सरलता से निकल जाता है। कभी-कभी प्रतिस्थापित चर राशि की सीमाएं निकालना कठिन हो जाता है तो ऐसी अवस्था में समाकलन करने के पश्चात् परिणाम को दिए हुए चर में परिवर्तित करके उसी की दी हुई सीमाओं से समाकलन का मान निकाल लेते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-4. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{3x-2}$ (ii) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 2x}$ (iii) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx$ (iv) $\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^4} dx.$

हल: (i) माना

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{(3x-2)} = \frac{1}{3}[\log|3x-2|]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}[\log 4 - \log|-5|]$$

$$= \frac{1}{3}[\log 4 - \log 5] = \frac{1}{3}\log\frac{4}{5}.$$

(ii) माना

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 2x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}[-\cot x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}[-\cot \pi/2 + \cot \pi/4] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$$

(iii) माना

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} dx$$

माना $\tan^{-1} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$ जब $x=0$ तो $t=0$; $x=\infty$ तो $t=\pi/2$

$\therefore$ $$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin t\, dt = [-\cos t]_{0}^{\pi/2} = -\cos \pi/2 + \cos 0 = 0+1 = 1.$$

(iv) माना $I = \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^4} dx$, माना $x^2 = t \Rightarrow 2x\, dx = dt$

जब $x=0$ तो $t=0$; $x=1$ तो $t=1$

$\therefore$ $$I = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = [\tan^{-1} t]_{0}^{1} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

उदाहरण-5. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi/4}(2\sec^2 x+x^3+1)dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ (iii) $\int_0^1 x\,e^x dx$

हल: (i) माना $$I=\int_0^{\pi/4}(2\sec^2 x+x^3+1)\,dx$$

$$=\left[2\tan x+\frac{x^4}{4}+x\right]_0^{\pi/4}=\left[2\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{\pi}{4}\right]-(0+0+0)$$

$$=2\times1+\frac{1}{4}\times\frac{\pi^4}{256}+\frac{\pi}{4}=2+\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{4}.$$

(ii) माना $$I=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$ माना $e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt$

जब $x=0$ तो $t=e^0=1$

जब $x=1$ तो $t=e^1=e$

$\therefore$ $$I=\int_1^e\frac{dt}{1+t^2}=[\tan^{-1}t]_1^e=\tan^{-1}e-\tan^{-1}(1)=\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$$

(iii) माना $$I=\int_0^1 \underset{\text{I}}{x}\,\underset{\text{II}}{e^x}\,dx$$ (e^x को द्वितीय फलन मान खण्डशः समाकलन से)

$$=[xe^x]_0^1-\int_0^1 1\times e^x dx=[1.e^1-0]-[e^x]_0^1$$

$$=e-[e^1-e^0]=e-e+e^0=e^0=1$$

उदाहरण-6. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ (ii) $\int_1^e e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$

हल: (i) माना $$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$$ माना $\sin x=t\ \therefore \cos x\,dx=dt$

जब $x=0, t=0$ तथा जब $x=\pi/2$ तो $t=1$

$\therefore$ $$I=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)(2+t)}=\int_0^1\left[\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2+t}\right]dt$$

$$=[\log|(1+t)|-\log|2+t|]_0^1$$

$$=\left[\log\left|\frac{1+t}{2+t}\right|\right]_0^1=\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}=\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}\right)=\log\frac{4}{3}.$$

(ii) माना $$I=\int_1^e e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$$

$$=\int_1^e e^x\left[\frac{1}{x}+\log x\right]dx$$

$$=\left[e^x\log x\right]_1^e \qquad \left[\because \int e^x[f(x)+f'(x)]dx=e^x f(x)\right]$$

$$=e^e\log e-e^1\log 1=e^e\times1-e\times0=e^e$$

उदाहरण-7. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ (ii) $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$

हल: (i)

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

अंश व हर में $\cos^4 x$ का भाग देने पर–

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{2\tan x \sec^2 x}{1+\tan^4 x} dx$$

माना $\tan^2 x = t \Rightarrow 2\tan x \sec^2 x\, dx = dt$

जब $x = 0$ तो $t = 0$ तथा जब $x = \pi/4$ तो $t = 1$

$\therefore$ $$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\tan^{-1} t]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(ii) $$I = \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$$

माना $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta d\theta$

जब $x = a$ तो $\theta = \pi/4$ तथा $x = \infty$ तो $\theta = \pi/2$

$\therefore$ $$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta\sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta \times a\sec\theta}$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sec\theta d\theta}{a^4\tan^4\theta} = \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1/\cos\theta}{\sin^4\theta/\cos^4\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3\theta}{\sin^4\theta} d\theta = \frac{1}{a^4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta}{\sin^4\theta} d\theta$$

माना $\sin\theta = t \Rightarrow \cos\theta d\theta = dt$

जब $\theta = \pi/4$ तो $t = 1/\sqrt{2}$ तथा $\theta = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$ $$I = \frac{1}{a^4}\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \frac{1}{a^4}\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{a^4}\left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{3\times 1/2\sqrt{2}} + \frac{1}{1/\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{a^4}\left[\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[\frac{2+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{1}{a^4}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{3a^4}$$

उदाहरण-8. समाकल $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

अंश व हर में $\cos^2 x$ का भाग देने पर

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x}$$

माना $b\tan x = t \Rightarrow b\sec^2 x\, dx = dt$ जब $x = 0$ तो $t = 0$, $x = \pi/2$ तो $t = \infty$

$\therefore$
$$I = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{b} \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{ab}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0] = \frac{1}{ab}[\pi/2 - 0] = \frac{\pi}{2ab}.$$

उदाहरण-9. समाकल $\int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना
$$I = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}\, dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{\sqrt{2\sin x \cos x}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt{1 - (1 - 2\sin x \cos x)}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

माना $\sin x - \cos x = t \Rightarrow (\cos x + \sin x) dx = dt$, जब $x = 0$ तो $t = -1$, $x = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$
$$I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \sqrt{2}\left[\sin^{-1} t\right]_{-1}^{1}$$

$$= \sqrt{2}\left[\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

प्रश्नमाला 10.2

निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए–

1. $\int_1^3 (2x+1)^3\, dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$
3. $\int_1^3 \frac{\cos(\log x)}{x} dx$
4. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin x}$
6. $\int_o^c \frac{y}{\sqrt{y+c}} dy$
7. $\int_o^\infty \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$
8. $\int_1^2 \frac{(1+\log x)^2}{x} dx$
9. $\int_\propto^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\propto)(\beta-x)}}, \beta > \propto$
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x+\cos x)}{9+16\sin 2x}$
11. $\int_{1/e}^e \frac{dx}{x(\log x)^{1/3}}$
12. $\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 3x dx$
13. $\int_e^{e^2} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$
14. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\cos x} dx$
16. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$
17. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$
18. $\int_{-1}^1 x\tan^{-1} x dx$
19. $\int_0^1 \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$
21. $\int_1^2 \log x\, dx$
22. $\int_{4/\pi}^{2/\pi} \left(-\frac{1}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x\, dx}{\cos^2 x+3\cos x+2}$
24. $\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx$
25. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$
26. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

10.07 निश्चित समाकलों के मूल गुणधर्म (Basic properties of definite integral)

गुणधर्म–I "अगर सीमाओं में परिवर्तन न किया जाए तो निश्चित समाकल में चर राशि बदलने से समाकल का मान नहीं बदलता है।"

अर्थात् $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

प्रमाण: माना $$\int f(x)dx = F(x) \qquad \therefore \int f(t)dt = F(t)$$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

तथा $$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

$\therefore$ $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

गुणधर्म–II "निश्चित समाकल की सीमाओं को परस्पर बदलने से समाकल का मान तो नहीं बदलता परन्तु चिह्न बदल जाता है।

अर्थात् $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

प्रमाणः माना $\int f(x)dx = F(x)$

$\therefore$ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

तथा $\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_b^a f(x)dx$

इस प्रकार, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

गुणधर्म–III अगर $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

प्रमाणः माना $\int f(x)dx = F(x)$

$\therefore$ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (1)

पुनः $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$

$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$= F(b) - F(a)$ (2)

(1) व (2) से, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

व्यापकीकरण (Generalization)

यदि $a < c_1 < c_2 < .... < c_n < b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

नोटः इस गुणधर्म का प्रयोग प्रायः तब करते है जब समाकल्य दिए गए समाकलन अन्तराल अर्थात् $[a, b]$ में एक से अधिक नियमों से प्राप्त होता है।

गुणधर्म–IV $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

प्रमाणः दायां पक्ष $= \int_a^b f(a+b-x)dx$

माना $a+b-x = y \Rightarrow -dx = dy$

सीमाएंः जब $x = a$ तब $y = b$ तथा जब $x = b$ तब $y = a$

$\therefore$ दायां पक्ष $= \int_b^a f(y)\cdot(-dy) = \int_a^b f(y)dy$ (गुणधर्म-II से)

$= \int_a^b f(x)dx =$ बायां पक्ष (गुणधर्म-I से)

अर्थात् $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

विशेष स्थितिः यदि $a = 0$ हो तो

$$\int_0^b f(x)\cdot dx = \int_0^b f(b-x)dx$$

गुणधर्म–IV के इस महत्वपूर्ण रूप में प्रयोग ऐसे समाकलों का मान ज्ञात करने में करते हैं जिनके समाकल्य अर्थात् $f(x)$ के हर में x के स्थान पर $(b-x)$ रखने पर प्रायः परिवर्तन नहीं आता है। इस गुणधर्म के प्रयोग के लिए निम्न सीमा का शून्य होना आवश्यक है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-10. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}} dx$$

या
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx \qquad (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}+\sqrt{\cos(\pi/2-x)}} dx$$

या
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx \qquad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$$

या
$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$
$$I = \frac{\pi}{4}$$
अर्थात् $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\cot x}} dx = \frac{\pi}{4}$

टिप्पणी: इसी प्रकार गुणधर्म IV के प्रयोग से निम्न व्यापक समाकलों के मान भी $\pi/4$ ही प्राप्त होते हैं।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^n x} dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cot^n x}$ (v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx$ (vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cosec}^n x}{\sec^n x+\operatorname{cosec}^n x} dx$

जहाँ n का मान कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$.

हल: माना
$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

गुणधर्म-IV के प्रयोग से

$$I = \int_{-a}^{a} f(-a+a-x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)\,dx$$

उदाहरण-12. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना
$$I=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} \qquad (1)$$

या
$$I=\int_1^4 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{5-(5-x)}+\sqrt{5-x}}dx$$

या
$$I=\int_1^4 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx \qquad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}dx$$

$$=\int_1^4 dx=[x]_1^4=4-1=3$$

$\therefore$ $$I=3/2.$$

गुणधर्म–V: $\int_o^{na} f(x)dx=n\int_o^a f(x)dx$, यदि फलन $f(x)$, a आवर्तनांक का आवर्त्ती फलन है, अर्थात् $f(a+x)=f(x)$

प्रमाणः गुणधर्म III के अनुसार

$$\int_o^{na} f(x)dx=\int_o^a f(x)dx+\int_a^{2a} f(x)dx+\int_{2a}^{3a} f(x)dx+...+\int_{(n-1)a}^{na} f(x)dx$$

अब समाकल $\int_o^{2a} f(x)dx$ में $x=a+t$ रखने पर $dx=dt$ जब $x=a$, $t=o$ तथा $x=2a$, $t=a$

$\therefore$ $$\int_a^{2a} f(x)dx=\int_o^a f(a+t)dt=\int_o^a f(a+x)dx=\int_o^a f(x)dx \qquad [\because f(a+x)=f(x)]$$

इसी प्रकार, दायें पक्ष के प्रत्येक समाकल में $x=y+$ (निम्न सीमा) प्रतिस्थापित कर प्रत्येक का मान $\int_o^a f(x)dx$ के बराबर सिद्ध कर सकते हैं। चूंकि $f(x)$, a आवर्तनांक का आवर्त्ती फलन है अतः

$$f(x)=f(x+a)=f(x+2a)=.....=f(x+na)$$

अतः
$$\int_o^{na} f(x)dx=\underbrace{\int_o^a f(x)dx+\int_o^a f(x)dx+...+\int_o^a f(x)dx}_{n\text{ बार}}=n\int_o^a f(x)dx$$

गुणधर्म–VI
$$\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & ; \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो अर्थात् } f(-x)=f(x)\\ 0 & ; \text{ यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो अर्थात् } f(-x)=-f(x)\end{cases}$$

प्रमाणः गुणधर्म III से

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^o f(x)dx+\int_o^a f(x)dx \qquad (\because -a<o<a)$$

$$=I_1+\int_o^a f(x)dx \qquad (1)$$

जहाँ $$I_1 = \int_{-a}^{o} f(x)\,dx$$

माना $$x = -y \Rightarrow dx = -dy$$

सीमाएं: जब $x = -a$ तो $y = a$ $x = o$ तो $y = o$

$\therefore$ $$I_1 = \int_{a}^{o} -f(-y)\,dy = \int_{o}^{a} f(-y)\,dy$$ (गुणधर्म II से)

$$= \int_{o}^{a} f(-x)\,dx$$ (गुणधर्म I से)

अतः समीकरण (1) से–

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(-x)\,dx + \int_{o}^{a} f(x)\,dx \qquad (2)$$

स्थिति (i): जब $f(x)$ सम फलन हो अर्थात् $f(-x) = f(x)$

तो $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{o}^{a} f(x)\,dx$$

स्थिति (ii): जब $f(x)$ विषम फलन हो अर्थात् $f(-x) = -f(x)$

तो $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(x)\,dx = 0$$

अतः $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx & ; \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो अर्थात् } f(-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{ यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो अर्थात् } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

गुणधर्म–VII: $$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx & ; \text{ यदि } f(2a-x) = f(x) \\ 0 & ; \text{ यदि } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

प्रमाण: $$\int_{o}^{2a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$$ (गुणधर्म III से, $\therefore o < a < 2a$)

$$= \int_{o}^{a} f(x)\,dx + I_1 \qquad (1)$$

यहाँ $$I_1 = \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$$

माना $x = 2a - y \Rightarrow dx = -dy$ जब $x = a$ तो $y = a$ व $x = 2a$ तो $y = o$

$\therefore$ $$I_1 = \int_{a}^{o} -f(2a-y)\,dy = \int_{o}^{a} f(2a-y)\,dy$$ (गुणधर्म II से)

$$= \int_{o}^{a} f(2a-x)\,dx$$ (गुणधर्म I से)

समीकरण (1) में I_1 का यह मान रखने पर

$$\int_{o}^{2a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(2a-x)\,dx$$

स्थिति (i): जब $f(2a-x) = f(x)$

तो $$\int_{o}^{2a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{o}^{a} f(x)\,dx$$

स्थिति (ii): जब $f(2a-x)=-f(x)$

तो $$\int_o^{2a} f(x)\,dx=\int_o^{a} f(x)\,dx-\int_o^{a} f(x)\,dx=0$$

अतः $$\int_0^{2a} f(x)\,dx=\begin{cases}2\int_0^{a} f(x)\,dx & ;\ \text{यदि } f(2a-x)=f(x)\\ 0 & ;\ \text{यदि } f(2a-x)=-f(x)\end{cases}$$

टिप्पणी: (i) जब $f(2a-x)=f(x)$ हो तो $f(x)$ को सम फलन नहीं मानना चाहिए तथा इसे सम फलन की परिभाषा से जोड़कर नहीं देखना चाहिये। $f(x)$ सम फलन तब कहलाता है जब $f(-x)=f(x)$.

(ii) सामान्यता जब निम्न सीमा शून्य होती है तब हम गुणधर्म-IV का प्रयोग करते हैं अर्थात् हम x को $f(a+b-x)$ (निम्न सीमा + उच्च सीमा $-x$) से प्रतिस्थापित करते हैं। परन्तु कभी-कभी ऐसा करते समय समाकल्य अर्थात् $f(x)$ का रूप परिवर्तित नहीं होता है अर्थात् गुणधर्म-IV का उपयोग व्यर्थ (Failure of Prop-IV) हो जाता है तब हम गुणधर्म-VII का प्रयोग करते हैं।

10.08 विशेष गुणधर्म (x के निष्कासन का नियम)

यदि $f(a+b-x)=f(x)$ हो तो $\int_a^b x\,f(x)\,dx$ से x का निष्कासनः

$$\int_a^b x\,f(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

प्रमाणः माना $$I=\int_a^b xf(x)\,dx$$

गुणधर्म IV के प्रयोग से

$$\int_a^b (a+b-x)\,f(a+b-x)\,dx$$

परन्तु दिया है $f(a+b-x)=f(x)$

$\therefore$ $$I=\int_a^b (a+b-x)\,f(x)\,dx$$

$$=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

या $$I=(a+b)\int_a^b f(x)dx-I$$

या $$2I=(a+b)\int_a^b f(x)\,dx\Rightarrow I=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-13. समाकल $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना $$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

या $$I=\int_0^{\pi} x.\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)dx$$

यहाँ $$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$\therefore$ $$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x)$$

$\therefore$ x के निष्कासन नियम से

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

माना $\cos x = t \Rightarrow \sin x\, dx = -dt$ $\quad x = 0$ तो $t = 1$ तथा $x = \pi$ तो $t = -1$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}(\tan^{-1} t)_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

महत्वपूर्ण मानक समाकल (Important standard integral)

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx$$

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx \qquad (1)$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left[\sin\left(\pi/2 - x\right)\right] dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\, dx \qquad (2)$$

(1) व (2) को जोडने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} [\log \sin x + \log \cos x] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} (\log \sin 2x - \log 2) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - \log 2 \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - (\log 2)[x]_0^{\pi/2}$$

या $$2I = I_1 - \frac{\pi}{2}(\log 2) \qquad (3)$$

जहाँ $$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx$$

माना $$2x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

सीमाएं: जब $x=0$ तो $t=0$ तथा $x=\pi/2$ तो $t=\pi$

$\therefore$ $$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin t)\,dt=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\pi/2}\log\sin t\,dt$$ (गुणधर्म VII से)

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx \quad (\text{गुणधर्म I से})=I$$ (समीकरण (1) से)

$\therefore$ समीकरण (3) से $$2I=I-\frac{\pi}{2}\log_e 2\Rightarrow I=-\frac{\pi}{2}(\log_e 2)$$

या $$\int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

$$\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{cosec} x\,dx=\int_0^{\pi/2}\log\sec x\,dx=\frac{\pi}{2}\log 2.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-14. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_1^4 f(x)\,dx$ जहाँ $f(x)=\begin{cases}4x+3, & 1\le x\le 2\\ 3x+5, & 2\le x\le 4\end{cases}$ (ii) $\int_0^2|1-x|\,dx$ (iii) $\int_{-1}^1 e^{|x|}dx$

हल: (i) $$\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^4 f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2(4x+3)\,dx+\int_2^4(3x+5)\,dx\left[\because f(x)=\begin{cases}4x+3 & ; \quad 1\le x\le 2\\ 3x+5 & ; \quad 2\le x\le 4\end{cases}\right]$$

$$=\left[2x^2+3x\right]_1^2+\left[\frac{3x^2}{2}+5x\right]_2^4$$

$$=\left[(8+6)-(2+3)\right]+\left[(24+20)-(6+10)\right]=9+28=37.$$

(ii) $$\int_0^2|1-x|\,dx=\int_0^1|1-x|\,dx+\int_1^2|1-x|\,dx \qquad \left[\because \begin{array}{ll}|1-x|=1-x & ; \quad x<1\\ \quad\;\;=-(1-x) & ; \quad x>1\end{array}\right]$$

$$=\int_0^1(1-x)\,dx+\int_1^2(1-x)\,dx$$

$$=\left[x-x^2/2\right]_0^1-\left[x-x^2/2\right]_1^2$$

$$=\left[(1-1/2)-0\right]-\left[(2-2)-(1-1/2)\right]=1/2+1/2=1.$$

(iii) $$\int_{-1}^1 e^{|x|}dx=\int_{-1}^0 e^{|x|}dx+\int_0^1 e^{|x|}dx \qquad \left[\because |x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}\right]$$

$$=\int_{-1}^0 e^{-x}dx+\int_0^1 e^{x}dx$$

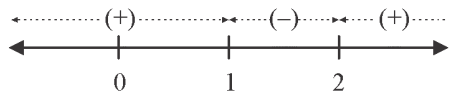
$$=[-e^{-x}]_{-1}^0+[e^x]_0^1=(-e^o+e^1)+(e-e^o)=2e-2.$$

उदाहरण-15. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^2 \left|x^2-3x+2\right|dx$ (ii) $\int_{1/e}^{e} \left|\log_e x\right|dx$ (iii) $\int_0^{\pi} \left|\cos x\right|dx$

हल: (i) यहाँ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

x^2-3x+2 का चिह्न x के भिन्न-भिन्न मानो के अनुसार निम्न प्रकार होगा



$$\therefore \qquad |x^2-3x+2| = \begin{cases} x^2-3x+2, & 0 \le x \le 1 \\ -\left(x^2-3x+2\right), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx = \int_0^1 |x^2-3x+2|\,dx + \int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2-3x+2\right)dx + \int_1^2 -\left(x^2-3x+2\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(1/3-3/2+2\right)-(0)\right]-\left[\left(8/3-6+4\right)-\left(1/3-3/2+2\right)\right]$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6} = \frac{5}{3}-\frac{2}{3} = 1$$

(ii) $$\int_{1/e}^{e} |\log_e x|\,dx = \int_{1/e}^{1} |\log_e x|\,dx + \int_1^e |\log_e x|\,dx$$

$$= \int_{1/e}^{1} -\log_e x\,dx + \int_1^e \log_e x\,dx \quad \left[\because |\log_e x| = \begin{cases} -\log_e x, & \text{यदि } 1/e < x < 1 \\ \log_e x, & \text{यदि } 1 \le x < e \end{cases}\right]$$

$$= -\left[x(\log_e x-1)\right]_{1/e}^{1} + \left[x(\log_e x-1)\right]_1^e \qquad \left[\because \int \log_e x\,dx = x\left(\log_e x-1\right)\right]$$

$$= -\left[(0-1)-1/e(-1-1)\right]+\left[e(1-1)-(0-1)\right]$$

$$= 1-2/e+1 = 2-2/e$$

(iii) $$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\,dx \qquad \because |\cos x| = \begin{cases} \cos x & ; \quad 0 < x \le \pi/2 \\ -\cos x & ; \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \left(\sin \pi/2 - \sin 0\right) - \left(\sin \pi - \sin \pi/2\right) = (1-0)-(0-1) = 2$$

उदाहरण-16. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

हल: (i) माना $$I = \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx \quad (1)$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \log\left[\cot(\pi/2 - x)\right] dx$$ (गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर)

या $$I = \int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx \quad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \cot x \, dx + \int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\log(\cot x) + \log(\tan x)\right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\cot x \times \tan x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(1) \, dx = \int_0^{\pi/2} (0) \, dx$$

या $$2I = 0 \qquad \therefore I = 0$$

(ii) माना $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx \quad (1)$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x) - \cos(\pi/2 - x)}{1 + \sin(\pi/2 - x)\cos(\pi/2 - x)} dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx \quad (2)$$

समीकरण (1) व (2) जोड़ने पर

$$2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

उदाहरण-17. निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{8 - x}} dx$ (ii) $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$

हल: (i) माना $$I = \int_0^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{8 - x}} dx \quad (1)$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I = \int_0^8 \frac{\sqrt{8 - x}}{\sqrt{8 - x} + \sqrt{8 - (8 - x)}} dx$$

या $$I = \int_0^8 \frac{\sqrt{8 - x}}{\sqrt{8 - x} + \sqrt{x}} dx \quad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^8 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}+\sqrt{x}}dx = \int_0^8 dx = [x]_0^8 = 8, \qquad \therefore \; I = 4$$

(ii) $$I = \int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$$

माना $$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$$

सीमाएं: $x = 0$ तो $\theta = 0$ तथा $x = a$ तो $\theta = \pi/2$

$\therefore$ $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\sin\theta + a\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \qquad (1)$$

गुणधर्म-(IV) $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\pi/2-\theta)\,d\theta}{\sin(\pi/2-\theta)+\cos(\pi/2-\theta)}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण-18. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx$$

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx \qquad (1)$$

गुणधर्म IV के प्रयोग से

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x)+\cos(\pi/2-x)}dx$$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x+\sin x}dx \qquad (2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}\right) + \left(\frac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2}\right)}$$

($\sin x$ व $\cos x$ को $\tan x/2$ में बदलने पर)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\tan^2 x/2}{2\tan x/2 + 1 - \tan^2 x/2} dx$$

या

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x/2}{1 + 2\tan x/2 - \tan^2 x/2} dx$$

माना $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx = dt$

सीमाएं: जब $x = 0$ तो $t = 0$; जब $x = \pi/2$ तो $t = 1$

$\therefore$

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t-t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{2-(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{2}+(t-1)}{\sqrt{2}-(t-1)}\right|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[0 + \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left[\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)} \times \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(2-1)} = \frac{2}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

उदाहरण-19. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$

हल: माना

$$I = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \qquad (1)$$

या $$= I_1 - I_2$$

जहाँ $$I_1 = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \qquad (\because f(x) \text{ सम फलन है})$$

अतः गुणधर्म VI के प्रयोग से

$$= 2a\left[\sin^{-1} x/a\right]_0^a = 2a\left(\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)\right) = 2a \times \left(\pi/2 - 0\right) = \pi a$$

तथा $$I_2 = \int_{-a}^{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 0$$

(गुणधर्म VI से, जब $f(x)$ विषम फलन हो तो $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$)

फलतः समीकरण (1) से, $I = \pi a - 0 = \pi a$

उदाहरण-20. सिद्ध कीजिए

$$\int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2.$$

हल: माना $$I = \int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर

$$I = \int_0^{\pi/4} \log_e\left[1 + \tan\left(\pi/4 - x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log_e\left[1 + \frac{\tan \pi/4 - \tan x}{1 + \tan(\pi/4)\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log_e\left[1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log_e\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\log_e 2 - \log_e(1 + \tan x)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\log_e 2)dx - \int_0^{\pi/4} \log_e(1 + \tan x)dx$$

या $$I = (\log_e 2)[x]_0^{\pi/4} - I$$

या $$2I = \frac{\pi}{4}\log_e 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log_e 2$$

$\Rightarrow$ $$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log_e 2$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए $I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx = \pi \log_e(1/2)$.

हल: माना $$I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx \qquad (1)$$

गुणधर्म IV का प्रयोग करने पर–

$$I = \int_0^{\pi} \log[1+\cos(\pi - x)]\,dx$$

या $$I = \int_0^{\pi} \log(1-\cos x)\,dx \qquad (2)$$

(1) व (2) को जोड़ने पर–

$$2I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x) + \log(1-\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log\{(1+\cos x)(1-\cos x)\}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log(1-\cos^2 x)\,dx$$

या $$2I = \int_0^{\pi} \log \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi} \log \sin x\,dx$$

या $$I = \int_0^{\pi} \log \sin x\,dx$$

या $$I = 2\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx \qquad \text{(गुणधर्म VII से)}$$

या $$I = 2I_1, \text{ जहाँ } I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx \qquad (3)$$

या $$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \cos x\,dx \qquad \text{(गुणधर्म IV के प्रयोग से)} \quad (4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$2I_1 = \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\sin x \cos x)\,dx$$

या $$2I_1 = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

या $$2I_1 = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,dx - \int_0^{\pi/2} (\log 2)\,dx$$

या $$2I_1 = I_2 - (\log 2)[x]_0^{\pi/2}$$

या $$2I_1 = I_2 - \frac{\pi}{2}\log 2 \qquad (5)$$

जहाँ $$I_2 = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,dx$$

माना $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$ तथा सीमाएँ जब $x = 0$ तो $t = 0$, जब $x = \pi/2$ तो $t = \pi$

$\therefore$ $$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx$$ (गुणधर्म I से)

या $$I_2 = \frac{1}{2} \times 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx$$ (गुणधर्म VII से)

या $$I_2 = \int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx = I_1$$

I_2 का मान समीकरण (5) में रखने पर

$$2I_1 = I_1 - \frac{\pi}{2}\log 2$$

या $$I_1 = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$I = 2I_1 = 2 \times \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} = \pi \log\frac{1}{2}$$

या $$\int_0^{\pi/2} \log(1+\cos x)\,dx = \pi \log\frac{1}{2}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-22. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \pi\left[(\pi/2) - 1\right]$$

हल: $$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int_0^{\pi} x.\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)dx$$

यहाँ $$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

तो $$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1+\sin x} = f(x)$$

$\therefore x$ के निष्कासन नियम से, $$\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1 - \sec^2 x + \sec x \tan x\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \tan x + \sec x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left[(\pi - 0 - 1) - (0 - 0 + 1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\pi - 2\right] = \pi(\pi/2 - 1)$$ सिद्ध हुआ।

प्रश्नमाला 10.3

निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-2}^{2}|2x+3|\,dx$

2. $\int_{-2}^{2}|1-x^2|\,dx$

3. $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$, जहाँ $f(x)=\begin{cases}7x+3 & ; \quad 1\le x\le 3\\ 8x & ; \quad 3\le x\le 4\end{cases}$

4. $\int_{0}^{3}[x]\,dx$ जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन है।

5. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5\cos^2 x\,dx$

6. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$

7. $\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$

8. $\int_{0}^{\pi}\frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{-\cos x}}dx$

9. $\int_{0}^{\pi/2}\sin 2x.\log\tan x\,dx$

10. $\int_{-1}^{1}\log\left[\frac{2-x}{2+x}\right]dx$

11. $\int_{0}^{1}\log\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

13. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

14. $\int_{0}^{\pi/2}\log\sin 2x\,dx$

15. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{(x+\pi/4)}{2-\cos 2x}dx$

16. $\int_{0}^{\pi}\log(1-\cos x)\,dx$

17. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^2 x\,dx$

18. $\int_{0}^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$

19. $\int_{0}^{\pi}x\sin^3 x\,dx$

20. $\int_{0}^{\pi/2}\log(\tan x+\cot x)\,dx$

21. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+e^x}dx$

22. $\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{f(x)+f(a+b-x)}dx$

विविध उदाहरण

उदाहरण-23. सिद्ध कीजिए

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\,dx}{1+\cos\propto\sin x}=\frac{\pi\propto}{\sin\propto}$$

हल: माना $$f(x)=\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}$$

$$\therefore \quad f(\pi-x)=\frac{1}{1+\cos\propto\sin(\pi-x)}=\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}=f(x)$$

अतः x के निष्कासन नियम से

$$\int_{0}^{\pi}\frac{x}{1+\cos\propto\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos\propto\sin x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos\propto\left(\frac{2\tan x/2}{1+\tan^2 x/2}\right)}dx$$ ($\sin x$ का $\tan x/2$ में बदलने पर)

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x/2}{1+\tan^2 x/2+2\cos\propto\tan x/2}dx$$

माना $\tan x/2 = t \Rightarrow \frac{1}{2}\sec^2 x/2 \cdot dx = dt$

सीमाएं: $x=0$ तो $t=0$ तथा जब $x=\pi$ तो $t=\infty$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos\propto\sin x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{2}{1+t^2+2t\cos x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+\cos\propto)^2+(\sin\propto)^2}$$

$$= \pi\times\frac{1}{\sin\propto}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t+\cos\propto}{\sin\propto}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}\left[\tan^{-1}(\infty)-\tan^{-1}(\cot\propto)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}\left[\pi/2-(\pi/2-\propto)\right] \qquad \left[\because \cot\propto = \tan(\pi/2-\propto)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin\propto}(\propto) = \frac{\pi\propto}{\sin\propto}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण-24. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल: माना

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$ (आंशिक भिन्न करने पर)

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\left(\frac{1}{b}\tan^{-1}\infty-\frac{1}{a}\tan^{-1}\infty\right)-(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{(a^2-b^2)}\left[\frac{1}{b}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{a-b}{ab}\right) = \frac{\pi}{2(a+b)(a-b)}\times\frac{(a-b)}{ab} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$$

उदाहरण-25. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2x \log \sin x \, dx$$

हल: माना

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \underset{\text{II}}{\cos 2x} \underset{\text{I}}{\log \sin x} \, dx$$

$$= \left[\log \sin x . \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \times \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$= \left[0 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi/2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

उदाहरण-26. समाकल $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta \, d\theta$

सीमाएं: जब $x = 0$ तो $\theta = 0$ तथा $x = \infty$ तो $\theta = \pi/2$

$\therefore$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\log\left(1+\tan^2\theta\right)}{\left(1+\tan^2\theta\right)} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\left(1+\tan^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \log \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log \sec\theta \, d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \log \cos\theta \, d\theta$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} \log \cos\left(\pi/2 - \theta\right) d\theta \qquad \text{(गुणधर्म IV से)}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log \sin\theta \, d\theta = -2\left(-\pi/2 \log 2\right) \qquad \text{(मानक समाकल से)}$$

$$= \pi \log_e 2$$

विविध प्रश्नमाला–10

1. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$ का मान है

(क) $2\int_0^a \sin^3 x.x\, dx$ (ख) 0 (ग) a^2 (घ) 1.

2. $\int_2^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}} dx$ का मान है

(क) 3 (ख) 2 (ग) 3 / 2 (घ) 1 / 2

3. $\int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\, dx$ का मान है

(क) $\int_a^b f(x+c)\, dx$ (ख) $\int_a^b f(x)\, dx$ (ग) $\int_{a-2c}^{b-2c} f(x)\, dx$ (घ) $\int_a^b f(x+2c) dx$

4. यदि $A(x) = \int_0^x \theta^2 d\theta$ हो तो $A(3)$ का मान होगा–

(क) 9 (ख) 27 (ग) 3 (घ) 81

निम्नलिखित का समाकलन कीजिए

5. $\int_1^2 \frac{(x+3)}{x(x+2)} dx$

6. $\int_1^2 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

7. $\int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

8. $\int_{1/3}^1 \frac{(x-x^3)^{1/3}}{x^4} dx$

9. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x\, dx$

10. $\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$

11. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \sin 2x$

12. $\int_{-2}^2 |1-x^2|\, dx$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x(1+\sin x)}{(1+\cos^2 x)} dx$

14. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$

15. $\int_0^{\infty} (\cot^{-1} x)^2 dx$

16. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2}, a>1$

17. सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. निश्चित समाकल का मान अद्वितीय (unique) होता है।

2. (i) $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (ii) $\int_a^b [f(x) \pm \phi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \phi(x)dx$

   (iii) $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. (i) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ (ii) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^b f(x)dx$

   (iii) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx$

4. **निश्चित समाकल के गुणधर्मः**

   (i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

   (iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx,$ जहाँ $a<c<b$

   व्यापकीकरणः $a < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_n < b$ तो

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^b f(x)\,dx$$

   (iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ अतः $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

   (v) $\int_0^{na} f(x)\,dx = n\int_0^a f(x)\,dx$ अगर $f(a+x) = f(x)$ (अर्थात् $f(x), a$ आवर्तनांक का आवर्ती फलन है)

   (vi) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{अगर } f(x) \text{ सम फलन है अर्थात् } f(-x) = f(x) \\ 0, & \text{अगर } f(x) \text{ विषम फलन है अर्थात् } f(-x) = -f(x) \end{cases}$

   (vii) $\int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{अगर } f(2a-x) = f(x) \\ 0, & \text{अगर } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$

5. **x निष्कासन का नियमः** अगर $f(a+b-x) = f(x)$ हो तो

   $$\int_a^b x\, f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

6. $$\int_0^{\pi/2} \log\sin x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2} \log\cos x\, dx$$

   तथा $$\int_0^{\pi/2} \log\cos ecx\, dx = \frac{\pi}{2}\log 2 = \int_0^{\pi/2} \log\sec x\, dx$$

7. **योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलः** (परिभाषा) यदि $f(x)$ अन्तराल $[a, b]$ में परिभाषित वास्तविक मानों का सतत फलन हो तथा अन्तराल $[a, b]$ को h चौडाई के n बराबर भागों $a+h, a+2h, \ldots a+(n-1)h$ में विभक्त किया जाये तो

   $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)\right],$$ जहाँ $n \to \infty, nh = b-a$

   इस परिभाषा से निश्चित समाकलन का मान ज्ञात करना प्रथम सिद्धान्त से समाकलन करना कहलाता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 10.1

1. 4
2. $\frac{1}{3}(b^3-a^3)$
3. $86/3$
4. $e^{-a}-e^{-b}$
5. 10
6. $82/3$

प्रश्नमाला 10.2

1. 290
2. $\pi/4$
3. $\sin(\log 3)$
4. $2(e-1)$
5. 2
6. $\frac{2}{3}(2-\sqrt{2})c^{3/2}$
7. $e^{\pi/2}-1$
8. $\frac{1}{3}(1+\log 2)^2-\frac{1}{3}$
9. π
10. $\frac{1}{20}\log_e 3$
11. 0
12. $\frac{3\sqrt{2}-4}{10}$
13. $e^2/2-e$
14. $2/3$
15. $\log e/2$
16. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$
17. $\pi/4$
18. $\frac{\pi-2}{2}$
19. 1
20. $\frac{\pi}{2(a+b)}$
21. $\log 4/e$
22. $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$
23. $\log 9/8$
24. $3\pi/2$
25. $1-\pi/4$
26. $\log 9/8$

प्रश्नमाला 10.3

1. $25/2$
2. 4
3. 62
4. 3
5. 0
6. 0
7. $\pi/2$
8. $\pi/2$
9. 0
10. 0
11. 0
12. $\pi/12$
13. $\pi/4$
14. $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$
15. $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$
16. $\pi\log\frac{1}{2}$
17. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$
18. π
19. $\frac{2\pi}{3}$
20. $\pi\log 2$
21. 1
22. $\frac{b-a}{2}$

विविध प्रश्नमाला—10

1. (घ)
2. (ग)
3. (ख)
4. (क)
5. $\frac{1}{2}\log 6$
6. $\frac{e}{6}(2e-3)$
7. $e^{\pi/2}$
8. 6
9. $\frac{\pi}{48}(\pi^2-6)$
10. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$
11. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$
12. 4
13. π^2
14. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$
15. $\pi\log 2$
16. $\frac{\pi}{a^2-1}, a>1$