



## त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Identities)



### 7.01 प्रस्तावना (Introduction)

हमने पूर्व अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपातों एवं उनमें पारस्परिक सम्बन्धों में अध्ययन किया है। इस अध्याय में त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे।

#### त्रिकोणमितीय सर्वसमिकायें :

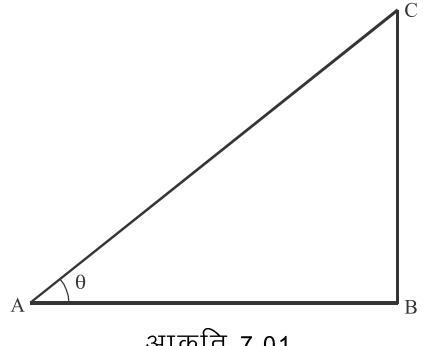
त्रिकोणमितीय सर्वसमिका त्रिकोणमितीय सम्बन्धित कोणों के सभी मानों के लिए सत्य होती है। यहाँ निम्न सर्वसमिकाओं की उत्पत्ति पर विचार करते हैं।

आकृतिनुसार,  $\triangle ABC$  में  $\angle B$  समकोण है। कोण  $\theta$  के लिए, BC लम्ब, AB आधार व AC कर्ण होगा।

$$\text{अतः } BC^2 + AB^2 = AC^2 \quad \dots(1)$$

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को  $AC^2$  से भाग देने पर

$$\begin{aligned} & \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \\ \Rightarrow & \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2 \\ \Rightarrow & (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \\ \Rightarrow & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \dots(2) \end{aligned}$$



यह सभी  $\theta$ , जहाँ  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  के लिए सत्य होता है।

यह एक सर्वसमिका है,

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को  $AB^2$  से भाग देने पर

$$\begin{aligned} & \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AB^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \\ & \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \\ & (\tan \theta)^2 + 1 = (\sec \theta)^2 \\ \Rightarrow & \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \\ \Rightarrow & 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \dots(3) \end{aligned}$$

अब समीकरण (1) के प्रत्येक पद को  $BC^2$  से भाग देने पर

$$\frac{BC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\left(\frac{BC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$1 + (\cot \theta)^2 = (\cosec \theta)^2$$

$$1 + \cot^2 \theta = \cosec^2 \theta \dots \text{(iv)}$$

उपरोक्त सर्वसमिकाओं को निम्न प्रकार लिख सकते हैं—

1.  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

या  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

या  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

2.  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

या  $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$

या  $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

3.  $1 + \cot^2 \theta = \cosec^2 \theta$

या  $\cosec^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$

या  $\cot^2 \theta = \cosec^2 \theta - 1$

### सारणी

	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\cosec \theta$
$\sin \theta$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\cosec \theta}$
$\cos \theta$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\frac{\sqrt{\cosec^2 \theta - 1}}{\cosec \theta}$
$\tan \theta$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\cosec^2 \theta - 1}}$
$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\cot \theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\cosec^2 \theta - 1}$
$\sec \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$	$\sec \theta$	$\frac{\cosec \theta}{\sqrt{\cosec^2 \theta - 1}}$
$\cosec \theta$	$\frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$	$\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\cosec \theta$

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-1.** सिद्ध किजिए कि  $\cot \theta + \tan \theta = \cosec \theta \sec \theta$

**हल:** LHS (वास पक्ष) =  $\cot \theta + \tan \theta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
&= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\
&= \cos \operatorname{ec} \theta \cdot \sec \theta = \text{RHS दक्षिण पक्ष}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-2.** सिद्ध किजिए कि  $(1 + \tan^2 \theta)(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= (1 + \tan^2 \theta)(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \\
&= (1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta) \\
&= \sec^2 \theta \cos^2 \theta \\
&= \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta \\
&= 1 = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-3.** सिद्ध किजिए कि  $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} = 2 \sec^2 \theta$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} \\
&= \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\
&= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \\
&= 2 \sec^2 \theta = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-4.** सिद्ध किजिए कि  $\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \cos \operatorname{ec} \theta + \cot \theta$

$$\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

अंश व हर को  $\sqrt{1 + \cos \theta}$  से गुणा करने पर

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(1 + \cos \theta) \times (1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \times (1 + \cos \theta)}} \\
&= \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}} \\
&= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= \cos \operatorname{ec} \theta + \cot \theta = \text{RHS दक्षिण पक्ष}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-5.** सिद्ध कीजिए कि  $(\sec \theta - \tan \theta)^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$

$$\begin{aligned}\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= (\sec \theta - \tan \theta)^2 \\&= \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \left( \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \\&= \frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} \\&= \frac{(1 - \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\&= \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}\end{aligned}$$

**उदाहरण-6.** सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$

$$\begin{aligned}\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\&= \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{1 + 1 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} \\&= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} = 2 \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\&= 2 \operatorname{cosec} \theta = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}\end{aligned}$$

**उदाहरण-7.** सिद्ध कीजिए  $\frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$

$$\begin{aligned}\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} \\&= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \theta [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta]}{\cos \theta [2 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)]} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
&= \frac{\sin \theta [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]}{\cos \theta [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta]} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
&= \tan \theta = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-8.** सिद्ध कीजिए कि  $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{1 + \sec A}{\sec A} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A + 1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos A + 1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1} \\
&= \frac{1 + \cos A}{1} \\
&= \frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{1 - \cos A} \quad \{ \text{अंश व हर में } (1 - \cos A) \text{ से गुणा करने पर} \} \\
&= \frac{(1)^2 - (\cos A)^2}{1 - \cos A} = \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} \\
&= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)} \quad (\because 1 - \cos^2 A = \sin^2 A)
\end{aligned}$$

**उदाहरण-9.** सिद्ध कीजिए कि  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \cos^4 \theta - \sin^4 \theta \\
&= (\cos^2 \theta)^2 - (\sin^2 \theta)^2 \\
&= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\
&= 1 \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\
&= 1 \cdot (1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-10.** यदि  $\sin \theta + \cos \theta = p$  और  $\sec \theta + \csc \theta = q$  हो, तो सिद्ध कीजिए कि  $q(p^2 - 1) = 2p$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= q(p^2 - 1) \\
p \text{ व } q \text{ का मान रखने पर} &= (\sec \theta + \csc \theta) [( \sin \theta + \cos \theta )^2 - 1] \\
&= \left( \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \right) [ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 1 ] \\
&\quad [101]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right) [1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 1] \\
&= \left[ \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta} \right] \times (2 \sin \theta \cos \theta) \\
&= 2 [\sin \theta + \cos \theta] = 2p = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-11.** सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\cot A + \cos ec A - 1}{\cot A - \cos ec A + 1} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{\cot A + \cos ec A - 1}{\cot A - \cos ec A + 1} \\
&= \frac{(\cot A + \cos ec A) - (\cos ec^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - \cos ec A + 1} \quad (\because \cos ec^2 A - \cot^2 A = 1) \\
&= \frac{(\cosec A + \cot A) - [(\cos ec A + \cot A)(\cos ec A - \cot A)]}{\cot A - \cos ec A + 1} \\
&= \frac{(\cosec A + \cot A)[1 - (\cos ec A - \cot A)]}{\cot A - \cos ec A + 1} \\
&= \frac{(\cosec A + \cot A)[\cot A - \cos ec A + 1]}{(\cot A - \cos ec A + 1)} \\
&= \cosec A + \cot A \\
&= \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A} = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

**उदाहरण-12.** सिद्ध कीजिए कि  $\left( \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left( \frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$

$$\begin{aligned}
\text{हल: LHS (वाम पक्ष)} &= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\cos ec^2 A} \\
&= \left[ \frac{\sec A}{\cos ec A} \right]^2 = \left[ \frac{1/\cos A}{1/\sin A} \right]^2 = \left[ \frac{1}{\cos A} \times \frac{\sin A}{1} \right]^2 \\
&= \left[ \frac{\sin A}{\cos A} \right]^2 = [\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS} \text{ (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

अब

$$\left[ \frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right]^2 = \left[ \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \right]^2 = \left[ \frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{\cos A - \sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} \right]^2 = \left[ -\frac{(\sin A - \cos A)}{\cos A} \times \frac{\sin A}{(\sin A - \cos A)} \right]^2 \\
&= \left[ -\frac{\sin A}{\cos A} \right]^2 = [-\tan A]^2 = \tan^2 A = \text{RHS (दक्षिण पक्ष)}
\end{aligned}$$

### प्रश्नमाला 7.1

1.  $\angle\theta$  के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को  $\sec\theta$  के पदों में व्यक्त कीजिए।

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों  $\sin\theta, \sec\theta, \tan\theta$  को  $\cot\theta$  के पदों में व्यक्त कीजिए।

निम्नलिखित को सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध कीजिए।

3.  $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cot^2\theta = \cot^2\theta$

4.  $\sec\theta(1 - \sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

7.  $\csc^2\theta + \sec^2\theta = \csc^2\theta \sec^2\theta$

6.  $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

7.  $\sqrt{\sec^2\theta + \csc^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

8.  $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha \tan\beta$

9.  $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\sec\theta$

10.  $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = 1$

11.  $\cot\theta - \tan\theta = \frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta \cos\theta}$

12.  $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta \sin^2\theta$

13.  $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$

14.  $\frac{1-\tan^2\alpha}{\cot^2\alpha-1} = \tan^2\alpha$

15.  $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

16.  $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta \cos^2\theta$

17.  $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

18.  $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta) = \csc\theta + \sec\theta$

19.  $\sin^2 \theta \cos \theta + \tan \theta \sin \theta + \cos^3 \theta = \sec \theta$

20.  $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \cos \operatorname{ec} \theta$

21.  $(\sin A + \cos \operatorname{ec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

22.  $\sin^8 \theta - \cos^8 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$

23.  $\sqrt{\frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}} = \cot \theta + \cos \operatorname{ec} \theta$

24.  $\frac{(1 + \cot \theta + \tan \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sec^3 \theta - \cos \operatorname{ec}^3 \theta} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

27.  $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2}{1 - 2 \cos^2 \theta} = \frac{2}{2 \sin^2 \theta - 1}$

26.  $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$

27.  $(\cos \operatorname{ec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

28.  $\frac{\cos^2 \theta}{1 - \tan \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 1 + \sin \theta \cos \theta$

29. यदि  $\sec \theta + \tan \theta = P$  हो, तो सिद्ध करो कि  $\frac{P^2 - 1}{P^2 + 1} = \sin \theta$

30. यदि  $\frac{\cos A}{\cos B} = m$  तथा  $\frac{\cos A}{\sin B} = n$  हो, तो सिद्ध कीजिए  $(m^2 + n^2) \cos^2 B = n^2$



## पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

### पूरक कोण

यदि दो कोणों का योग  $90^\circ$  हो तो दोनों कोण एक दूसरे के पूरक कोण कहलाते हैं। किसी न्यून कोण  $\theta$  का पूरक कोण  $(90^\circ - \theta)$  होगा। समकोण  $\Delta ABC$  में  $\angle B$  समकोण हो तो  $\angle A$  व  $\angle C$  का योफल समकोण होगा।

$$\angle A + \angle C = 90^\circ$$

यदि  $\angle A = \theta$  तो

$$\angle C = 90^\circ - \theta \text{ होगा}$$

अतः  $\theta$  व  $90^\circ - \theta$  परस्पर पूरक कोण होंगे

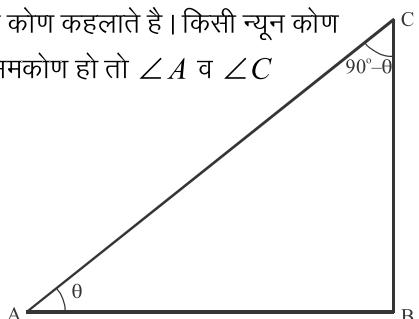
समकोण  $\Delta ABC$  में कोण  $\theta$  के लिए भुजा BC तथा AB क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

समकोण  $\Delta ABC$  में  $(90^\circ - \theta)$  के लिए भुजा AB तथा BC क्रमशः लम्ब व आधार होंगे।

अतः  $\Delta ABC$  में कोण  $(90^\circ - \theta)$  व  $\theta$  के लिए त्रिकोणमिती अनुपात

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC}$$



आकृति 7.02

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{BC}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\cosec(90^\circ - \theta) = \frac{AC}{AB}$$

$$\cosec \theta = \frac{AC}{BC}$$

उपर्युक्त समीकरणों की तुलना करने पर

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \cosec \theta$$

$$\cosec(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

जब  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

टिप्पणी: हम कह सकते हैं कि

किसी कोण का  $\sin =$  उसके पूरक कोण का  $\cos$

किसी कोण का  $\tan =$  उसके पूरक कोण का  $\cot$

किसी कोण का  $\sec =$  उसके पूरक कोण का  $\cosec$

इनका विलोम भी सत्य है।

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-13.**  $\frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:**  $\tan 49^\circ = \cot(90^\circ - 49^\circ) = \cot 41^\circ \quad \{\tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)\}$

$$\therefore \frac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ} = \frac{\cot 41^\circ}{\cot 41^\circ} = 1$$

**उदाहरण-14.**  $\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:**  $\because 40^\circ = 90^\circ - 50^\circ$

$$\therefore \sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

$$\text{अतः } \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ = \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

**उदाहरण-15.**  $\tan 39^\circ - \cot 51^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:**  $\tan 39^\circ = \cot(90^\circ - 39^\circ) = \cot 51^\circ$

$$\text{अतः } \tan 39^\circ - \cot 51^\circ = \cot 51^\circ - \cot 51^\circ = 0$$

**उदाहरण-16.**  $\sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } & \sec 50^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ \\ &= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \operatorname{cosec} (90^\circ - 40^\circ) \\ &= \operatorname{cosec} 40^\circ \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \sec 40^\circ \\ &= \frac{1}{\sin 40^\circ} \cdot \sin 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ} = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

**उदाहरण-17.** सिद्ध कीजिए  $\tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ = 1$

$$\begin{aligned}\text{हल: } & \text{वाम पक्ष (LHS)} = \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan (90^\circ - 20^\circ) \tan (90^\circ - 15^\circ) \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \cot 20^\circ \cdot \cot 15^\circ \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cdot \frac{1}{\tan 20^\circ \tan 15^\circ} = 1 \text{ (RHS)}\end{aligned}$$

**उदाहरण-18.** यदि  $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$  हो तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } & \tan 2A = \tan [90^\circ - (A - 18^\circ)] \\ & \tan 2A = \tan(108^\circ - A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore & 2A = 108^\circ - A \\ & 3A = 108^\circ \Rightarrow A = 36^\circ\end{aligned}$$

**उदाहरण-19.** निम्न समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए?

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + x \cos \theta \cot(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\begin{aligned}\text{हल: } & \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + x \cos \theta \cot(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \theta) \\ & \sec \theta + x \cos \theta \tan \theta = \cos \theta \\ & x \sin \theta = \cos \theta - \sec \theta \quad \left( \because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ & x = \frac{\cos \theta - \sec \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \left( \because \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ & = - \left[ \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] \quad \left( \because 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \right) \\ & = - \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad x = - \tan \theta\end{aligned}$$

प्रश्नमाला 7.2

निम्नलिखित के मान ज्ञात करो।

1. (i)  $\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$       (ii)  $\frac{\cos \operatorname{ec} 32^\circ}{\sec 58^\circ}$       (iii)  $\frac{\tan 10^\circ}{\cot 80^\circ}$       (iv)  $\frac{\cos 19^\circ}{\sin 71^\circ}$

2. (i)  $\cos \operatorname{ec} 25^\circ - \sec 65^\circ$       (ii)  $\cot 34^\circ - \tan 56^\circ$   
 (iii)  $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 54^\circ} - \frac{\sin 54^\circ}{\sin 36^\circ}$       (iv)  $\sin \theta \cos(90^\circ - \theta) + \cos \theta \sin(90^\circ - \theta)$

3. (i)  $\sin 70^\circ \sin 20^\circ - \cos 20^\circ \cos \text{cosec} 70^\circ$       (ii)  $\frac{2 \cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - \frac{\tan 40^\circ}{\cot 50^\circ} - \cos 60^\circ$

4. (i)  $\left( \frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ} \right)^2 + \left( \frac{\cos 55^\circ}{\sin 35^\circ} \right)^2 - 2 \cos 60^\circ$       (ii)  $\left( \frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ} \right)^2 + \left( \frac{\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ} \right)^2$

5. (i)  $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 60^\circ \cot 78^\circ$       (ii)  $\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ$

6. निम्न को  $0^\circ$  से  $45^\circ$  के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपराशों के पदों में व्यक्त कीजिए

ਜਿਸਤ ਲਿਖਿਤ ਕੋ ਸਿਹਟ ਕੀਤਾ ਜਾ.

7.  $\sin 65^\circ + \cos 25^\circ = 2 \cos 25^\circ$

8.  $\sin 35^\circ \sin 55^\circ - \cos 35^\circ \cos 55^\circ = 0$

9.  $\frac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \frac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} - 8 \sin^2 30^\circ = 0$

10.  $\sin(90^\circ - \theta) \cos(90^\circ - \theta) = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

11.  $\frac{\cos(90^\circ - \theta) \cos \theta}{\tan \theta} + \cos^2(90^\circ - \theta) = 1$

12.  $\frac{\tan(90^\circ - \theta) \cot \theta}{\cos \sec^2 \theta} - \cos^2 \theta = 0$

13.  $\frac{\cos(90^\circ - \theta) \sin(90^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} = \sin^2 \theta$

14. 
$$\frac{\sin \theta \cos(90^\circ - \theta) \cos \theta}{\sec(90^\circ - \theta)} + \frac{\cos \theta \sin(90^\circ - \theta) \sin \theta}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} = \sin \theta \cos \theta$$

17. यदि  $\sin 3\theta = \cos(\theta - 6^\circ)$  यहाँ  $3\theta$  और  $(\theta - 6^\circ)$  न्यूकोण है तो  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि  $\sec 5\theta = \cos \operatorname{ec}(\theta - 36^\circ)$  यहाँ  $5\theta$  एक न्यूकोण है तो  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि A, B और C किसी त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)$

18. यदि  $\cos 2\theta = \sin 4\theta$  हो और  $2\theta$  व  $4\theta$  न्यूनकोण हो तो  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए।

**उत्तरमाला**  
**प्रश्नमाला 7.1**

1.  $\sin \theta = \frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$ ,  $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$ ,  $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$ ,  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$

2. (i)  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$ ,  $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$ ,  $\sec \theta = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$

**प्रश्नमाला 7.2**

- |  |   |
|--|---|
| 1. (i) 1      (ii) 1      (iii) 1      (iv) 1  | 2. (i) 0      (ii) 0      (iii) 0      (iv) 1 |
| 3. (i) 0      (ii) $1/2$   | 4. (i) 1      (ii) 2                          |
| 5. (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$                                      |   |
| 6. (i) $\cos 9^\circ + \cos 19^\circ$ (ii) $\cot 22^\circ + \operatorname{cosec} 22^\circ$ | 15. $\theta = 24^\circ$                       |
| 18. $\theta = 15^\circ$  | 16. $\theta = 21^\circ$                       |